

ANNEXE DES ÉTUDES SUR L'INTERFÉROMÉTRIE

LES POLYNÔMES DE ZERNIKE

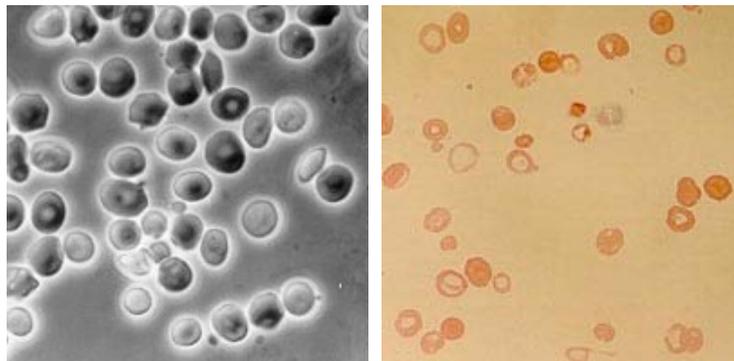
1. PRÉSENTATION DES POLYNÔMES

1.1. FREDERICK ZERNIKE

Dit Frits Zernike. Né à Amsterdam en 1888. Décédé en 1966.

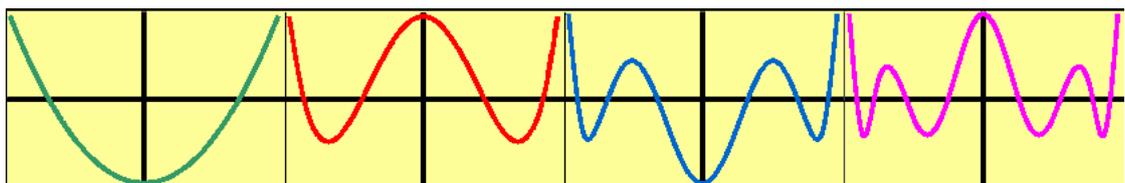
Prix Nobel de physique en 1953 pour le microscope à contraste de phase. Il permet d'observer le fonctionnement des cellules en biologie sans avoir à y injecter des produits de contraste. Cette technique a ensuite été étendue au contrôle des miroirs pour l'astronomie.

Image de cellules par contraste de phase (à gauche) et par coloration (à droite)



Vers 1930 il invente les polynômes qui permettent de décrire les aberrations des systèmes optiques. Au préalable, les aberrations étaient décrites par les théories de Seidel datant de 1856. Elles ne permettaient pas de séparer et de décrire toutes les aberrations. Les polynômes de Zernike sont unanimement utilisés depuis le milieu du vingtième siècle dans les systèmes optiques de pointes : optique adaptative, mise au point automatique, etc.

Profil des polynômes de Zernike pour les premières aberrations de sphéricité



1.2. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DES POLYNÔMES

Les polynômes de Zernike sont définis sur une surface circulaire.

Ils sont donc bien adaptés pour décrire la forme d'une onde passant par une pupille circulaire. C'est typiquement le cas des ondes lumineuses réfléchies par un miroir de télescope ou émergeant d'une lentille.

Chaque point de la pupille est repéré en coordonnées polaires par un rayon et un angle que l'on note : ρ et Φ . Par convention on utilise :

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \Phi \leq 2\pi$$

On sait étendre cette définition au cas des pupilles elliptiques.

Il existe plusieurs conventions de classement et de notation des polynômes.

Le plus souvent on rencontre le classement de l'université d'Arizona ou celle de James C. Wyant (Voir les listes en fin). Mais il arrive aussi que la convention de classement ne soit pas documentée par les auteurs...

L'expression mathématique des polynômes diffère sensiblement selon la manière de définir les indices.

Notation de James C. Wyant :

Les polynômes sont classables selon deux indices repérés par : n et m .

$$\text{Avec} \quad 0 \leq m \leq n$$

Les polynômes sont le produit d'un polynôme du rayon et d'une fonction trigonométrique de l'angle. Lorsque m diffère de zéro, il y a deux polynômes. On parle de polynôme pair (indiqué p) et de polynôme impair (indiqué i).

$${}^p Z_n^m(\rho, \phi) = R_n^m(\rho) \cdot \cos(m\phi)$$

$${}^i Z_n^m(\rho, \phi) = R_n^m(\rho) \cdot \sin(m\phi)$$

avec

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} \frac{(-1)^s (2n-m-s)!}{s! (n-s)! (n-m-s)!} \rho^{2n-2s-m}$$

Les appellations peuvent porter à confusion

Les appellations qui sont données aux polynômes de Zernike peuvent conduire à des difficultés. Par exemple le terme numéro 5 est souvent dit d'astigmatisme sur Y. Alors qu'il s'agit d'un astigmatisme d'une inclinaison de 45° sur les axes. De plus les appellations reprennent les noms des déformations optiques de troisième ordre (dites de Seidel) alors qu'elles n'y correspondent pas exactement. Voir le paragraphe sur l'expression des aberrations optiques.

Les polynômes d'indice $m = 0$ décrivent les déformations dites sphériques

La formulation ci-dessus s'applique aux cas où m est nul. Dans ce cas il n'y a qu'un polynôme et il est invariant par rotation. Ces polynômes forment l'ensemble des déformations dites sphériques. Encore nommées aberrations de sphéricité. La première correspond à la mise au point (ou focalisation), la deuxième est l'aberration de sphéricité qui caractérise la déformation de la sphère en ellipse, parabole ou hyperbole. Cette aberration doit correspondre à la formule optique du télescope.

Table des premières valeurs de m et n avec les polynômes et appellations :

Numéro	n	m	Polynôme	Appellation usuelle
0	0	0	1	Piston
1	1	1	$\rho \cos[\theta]$	Inclinaison sur X ou tilt X
2	1	1	$\rho \sin[\theta]$	Inclinaison sur Y ou tilt Y
3	1	0	$-1 + 2 \rho^2$	Mise au point ou focalisation
4	2	2	$\rho^2 \cos[2 \theta]$	Astigmatisme à 0° ou sur X
5	2	2	$\rho^2 \sin[2 \theta]$	Astigmatisme à 45° ou sur Y
6	2	1	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \cos[\theta]$	Coma sur X
7	2	1	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \sin[\theta]$	Coma sur Y
8	2	0	$1 - 6 \rho^2 + 6 \rho^4$	Aberration de sphéricité

1.3. QUELQUES PROPRIÉTÉS

Les polynômes sont orthogonaux.

Les polynômes sont orthogonaux par intégrale continue sur la pupille circulaire. Donc la décomposition d'une onde en polynômes de Zernike est unique : Il ne peut y avoir deux descriptions différentes d'une même onde (à l'ordre du développement prêt).

Nota bene : Ils ne sont pas obligatoirement orthogonaux par sommation sur un nombre fini de points...

Pour nos applications, on s'intéresse essentiellement aux premiers polynômes qui décrivent les plus grosses formes et déformations de l'onde. Voir le tableau illustratif ci-après.

Ces polynômes permettent de modéliser la forme de l'onde (encore nommé le front d'onde) lorsqu'ils sont combinés linéairement entre eux. Les coefficients de combinaison sont nommés les coefficients de Zernike.

La moyenne de chaque polynôme sur la pupille est nulle.

Pour chaque terme, sa moyenne sur l'ensemble de la pupille est nulle. (Sauf pour le piston !)

Nota bene : La moyenne n'est pas toujours nulle par sommation sur un nombre fini de points...

L'écart type de chaque polynôme est minimal.

Une formule permet de donner l'écart type apporté par chaque polynôme. Voir la table en fin.

Chaque terme d'ordre n comporte une quantité des termes d'ordre plus faible de manière à minimiser l'écart type à l'ordre n .

Si bien que le fait de pousser le développement à des ordres plus élevés ne peut qu'augmenter l'écart type de la représentation de l'onde obtenue. Pratiquement, si on arrête la décomposition polynomiale trop tôt, on minimise l'écart type.

L'écart type est souvent désigné par l'anglicisme RMS pour « root mean square » (mot à mot: la racine signifie le square ?!?!).

2. UTILISATION DES POLYNÔMES POUR L'ASTRONOMIE

2.1. DÉVELOPPEMENT DES SURFACES D'ONDES

Les polynômes sont utilisés pour décomposer les résultats des mesures par interférométrie des optiques astronomiques. On les utilise soit pour décrire l'écart de la forme des miroirs par rapport à la sphère idéale soit l'écart de la forme des ondes émergeant des miroirs par rapport à l'onde sphérique parfaite.

La décomposition de la forme de l'onde (ou du miroir) est notée ainsi :

$$W(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\max} \left\{ A_n \cdot Z_n^0(\rho) + \sum_{m=1}^n [B_{n,m} \cdot Z_n^m(\rho, \phi) + C_{n,m} \cdot Z_n^m(\rho, \phi)] \right\}$$

Avec A, B et C les coefficients dits de Zernike :

A_n pour les polynômes des aberrations de sphéricité,

$B_{n,m}$ pour les polynômes de Zernike pairs et

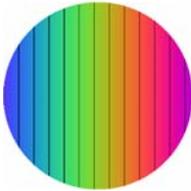
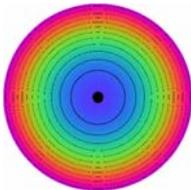
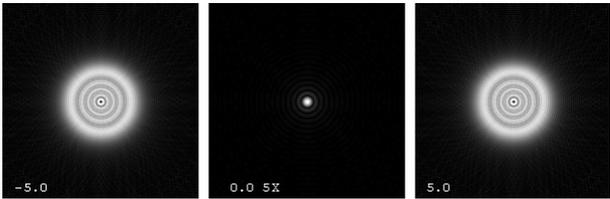
$C_{n,m}$ pour les polynômes impairs.

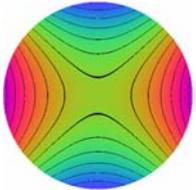
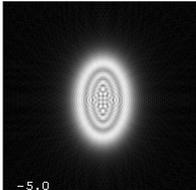
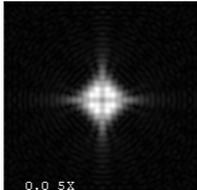
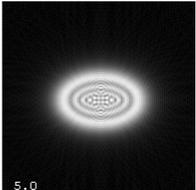
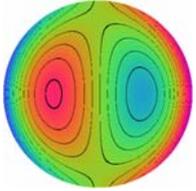
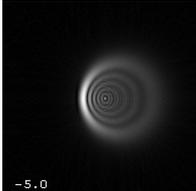
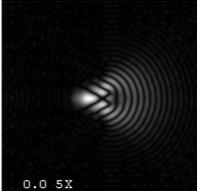
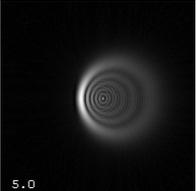
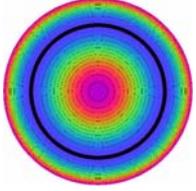
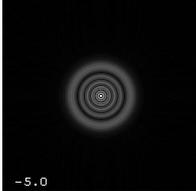
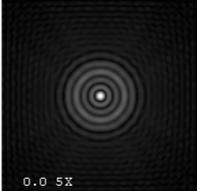
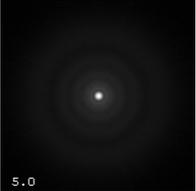
La décomposition est exprimée en **défauts sur le verre** ou en **défauts sur l'onde**. Elle est le plus souvent rapportée en nanomètre pour le verre et en fraction de longueur d'onde pour l'onde. Lorsqu'il s'agit de l'onde, on trouve soit la longueur l'onde d'analyse de l'interféromètre (par exemple les lasers He-Ne à 633 nm ou les semi-conducteurs à 650 nm) ou 550 nm qui est le maximum de sensibilité photoptique de l'œil.

2.2. LES PRINCIPAUX TERMES DE DÉVELOPPEMENT

On sait calculer la déformation induite par chaque polynôme sur l'image d'une étoile. Les tableaux suivants donnent ces déformations de l'image d'une étoile vue en intrafocale, au point et en extrafocale.

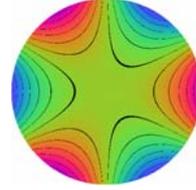
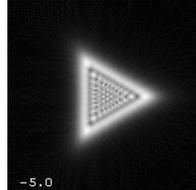
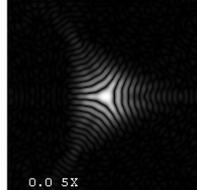
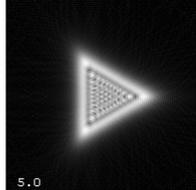
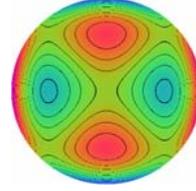
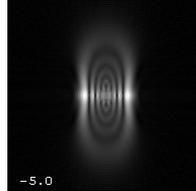
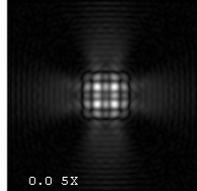
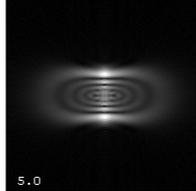
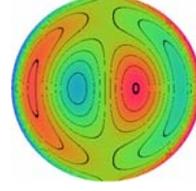
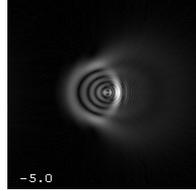
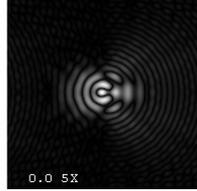
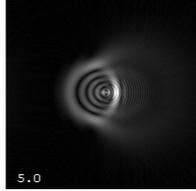
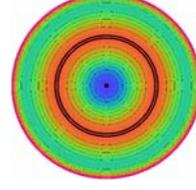
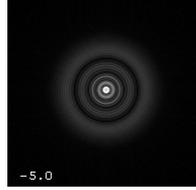
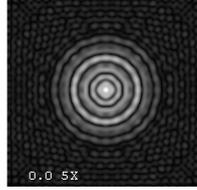
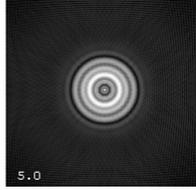
Les figures du tableau ont été réalisées avec le logiciel libre OpenFringe en version bêta 8.4. L'image au point est agrandie d'un facteur 5 pour sa lisibilité. Les images en intra et extrafocale sont données avec un décalage de mise au point de 5 longueurs d'onde.

N°	Type	Forme de l'onde	Effet
0	Piston	Plat parfait	« C'est parfait! »
1 & 2	Inclinaison		« Là, l'étoile n'est pas au centre. Commencez donc par la viser ! »
3	Mise au point		

N°	Type	Forme de l'onde	Effet		
4 & 5	Astigmatisme N.B. Souvent lié aux contraintes mécaniques.				
6 & 7	Coma N.B.: Se règle parfois avec la collimation				
8	Sphéricité N.B.: C'est en générale le premier défaut du verre...				

La valeur du coefficient de Zernike est de 1 pour les défauts présentés ici.

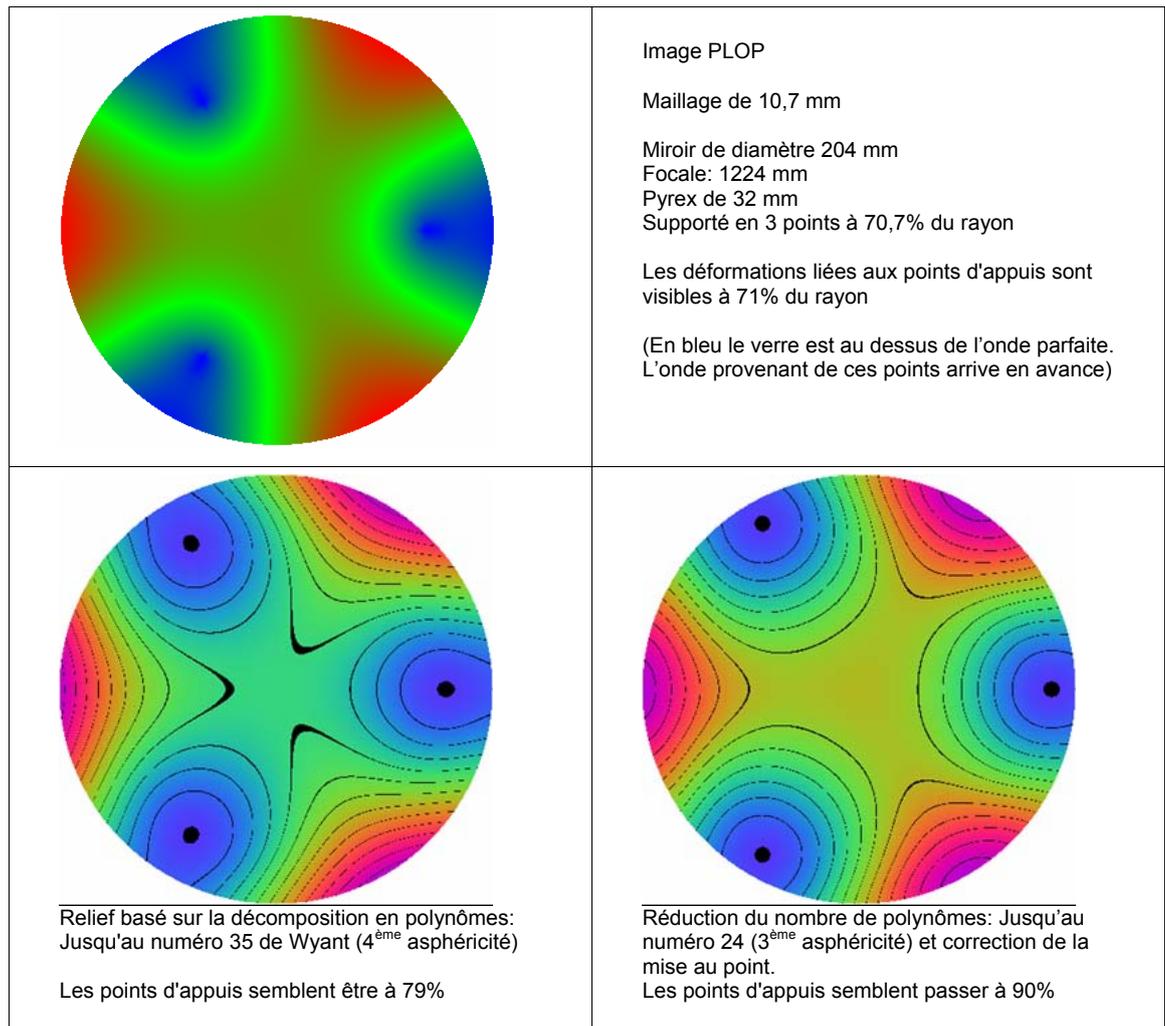
Les polynômes suivants peuvent tout aussi bien être décrits. Toutefois ce sont des aberrations plus difficiles à déceler car rarement présentes seules et rarement très fortes. Le tableau suivant donne les quatre familles d'aberrations suivantes de la liste de Wyant jusqu'à l'aberration de sphéricité d'ordre deux.

N°	Type	Forme de l'onde	Effet		
9 et 10	Trèfle				
11 et 12	Astigmatisme de 2ème ordre				
13 et 14	Coma de 2ème ordre				
15	Asphéricité de 2ème ordre				

2.3. MISES EN GARDE

Il faut s'assurer que la série de polynômes utilisée est suffisante pour bien représenter les défauts voulus ou relevés. La décomposition n'est pas toujours bien adaptée pour exprimer les résultats. On développe rarement assez pour représenter les turbulences atmosphériques lors des mesures, les défauts isolés et ponctuels, les traces d'usinages des machines outils et certains défauts d'alignements des systèmes.

Pour illustrer on peut observer que le logiciel PLOP, même en développant les polynômes jusqu'au numéro 35 et plus, ne donne pas encore une représentation parfaite des déformations qu'il calcule. Sa propre représentation, tirée du maillage de calcul, reste plus fine, tout particulièrement autour des points d'appuis sur le barillet où les efforts de cisaillement sont les plus importants.



2.4. EXPRESSION DES ABERRATIONS OPTIQUES

Les aberrations optiques usuelles sont obtenues en décomposant la forme de l'onde selon :

$$W(\rho, \phi) = W_{11} \cdot \rho \cos \phi + W_{20} \cdot \rho^2 + W_{40} \cdot \rho^4 + W_{31} \cdot \rho^3 \cos \phi + W_{22} \cdot \rho^2 \cos^2 \phi$$

On les appelle les aberrations de troisième ordre ou aberrations de Seidel. Avant les travaux de Ludwig von Seidel de 1856, on faisait l'approximation des petits angles pour laquelle le sinus de l'angle est égal à l'angle exprimé en radian. Seidel a développé les calculs optiques avec le terme suivant du développement du sinus selon le cube de l'angle :

$$\sin(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Ce nouveau terme à la puissance trois des angles a donné plus de précision aux calculs, tout en permettant toujours d'effectuer les calculs à la main et il a permis de calculer les principales aberrations optiques. D'où l'appellation d'aberration de troisième ordre.

Tandis que les polynômes de Zernike décomposent l'onde selon :

$$\begin{aligned} W(\rho, \phi) = & Z_0 \\ & + Z_1 \cdot \rho \cos \phi + Z_2 \cdot \rho \sin \phi \\ & + Z_3 \cdot (\rho^2 - 1) \\ & + Z_4 \cdot \rho^2 \cos 2\phi + Z_5 \cdot \rho^2 \sin 2\phi \\ & + Z_6 \cdot (3\rho^2 - 2)\rho \cos \phi + Z_7 \cdot (3\rho^2 - 2)\rho \sin \phi \\ & + Z_8 \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1) \end{aligned}$$

La mise en forme de la décomposition de Zernike est alors :

$$\begin{aligned} W(\rho, \phi) = & Z_0 - Z_3 + Z_8 \\ & + (Z_1 - 2Z_6) \cdot \rho \cos \phi + (Z_2 - 2Z_7) \cdot \rho \sin \phi \\ & + (2Z_3 - 6Z_8 + Z_4 \cos 2\phi + Z_5 \sin 2\phi) \cdot \rho^2 \\ & + 3(Z_6 \cos \phi + Z_7 \sin \phi) \cdot \rho^3 \\ & + 6Z_8 \cdot \rho^4 \end{aligned}$$

On retrouve dans cette mise en forme les termes de piston, d'inclinaison, de mise au point et d'astigmatisme, de coma et d'aberration de sphéricité selon la décomposition de Seidel.

On peut exprimer l'angle des aberrations selon leur intensité sur chaque axe en utilisant :

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos[\alpha - \tan^{-1}(b/a)]$$

On arrive alors à la décomposition en aberration de Seidel selon les coefficients de Zernike :

$$\begin{aligned} W(\rho, \phi) = & Z_0 - Z_3 + Z_8 \\ & + \rho \cdot \sqrt{(Z_1 - 2Z_6)^2 + (Z_2 - 2Z_7)^2} \times \cos \left[\phi - \tan^{-1} \left(\frac{Z_2 - 2Z_7}{Z_1 - 2Z_6} \right) \right] \\ & + \rho^2 \cdot (2Z_3 - 6Z_8 \pm \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2}) \\ & \pm 2\rho^2 \cdot \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2} \cdot \cos^2 \left[\phi - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{Z_5}{Z_4} \right) \right] \\ & + 3\rho^3 \cdot \sqrt{Z_6^2 + Z_7^2} \cdot \cos \left[\phi - \tan^{-1} \left(\frac{Z_7}{Z_6} \right) \right] \\ & + 6\rho^4 \cdot Z_8 \end{aligned}$$

On observe que les polynômes de Zernike, malgré leur nom, ne sont pas tous directement liés à une seule aberration selon la décomposition de Seidel.

Terme	Aberration optique	Intensité	Direction (3)
	Piston	$Z_0 - Z_3 + Z_8$	Sans
W11	Inclinaison	$\sqrt{(Z_1 - 2Z_6)^2 + (Z_2 - 2Z_7)^2}$	$\tan^{-1}\left(\frac{Z_2 - 2Z_7}{Z_1 - 2Z_6}\right)$
W20	Mise au point	$(2Z_3 - 6Z_8 \pm \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2})$ (1)	Sans
W22	Astigmatisme	$\mp 2 \cdot \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2}$ (2)	$\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{Z_5}{Z_4}\right)$
W31	Coma	$3 \cdot \sqrt{Z_6^2 + Z_7^2}$	$\tan^{-1}\left(\frac{Z_7}{Z_6}\right)$
W40	Asphéricité	$6Z_8$	sans

(1) Le signe à retenir est celui qui minimise l'intensité

(2) Signe opposé à celui retenu pour la mise au point

(3) Si le dénominateur sous l'arc tangente est négatif, il faut ajouter 180° au résultats d'angle.

2.5. EXPRESSION DU PIC-VALLÉE DES ABERRATIONS OPTIQUES

La relation entre les polynômes de Zernike et le pic-vallée de l'onde découle de l'expression des défauts optiques avec les polynômes telle que détaillée au paragraphe précédent. On y cherche le point de la pupille qui donne le minimum et le maximum. Le pic-vallée est donnée, pour les principales aberrations, par le tableau suivant.

Aberration optique	Pic-vallée par aberration
Inclinaison	$2 \cdot \sqrt{(Z_1 - 2Z_6)^2 + (Z_2 - 2Z_7)^2}$
Mise au point	$(2Z_3 - 6Z_8 \pm \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2})$ (1)
Astigmatisme	$2 \cdot \sqrt{Z_4^2 + Z_5^2}$
Coma	$6 \cdot \sqrt{Z_6^2 + Z_7^2}$
Asphéricité	$6 \cdot Z_8$

(1) Le signe à retenir est celui qui minimise le pic-vallée

Nota Bene : L'utilisation du pic-vallée pour qualifier l'écart de l'onde est facile et fréquent. Mais, outre qu'il est quasiment impossible d'accéder à cette valeur par la mesure, cela ne renseigne pas sur la surface concernée par le défaut pic et le défaut vallée. Il est généralement préférable de

parler d'écart type car cette notion est raisonnablement accessible à la mesure et elle intègre une pondération par la surface des défauts.

2.6. EXPRESSION DU COEFFICIENT DE SCHWARZSCHILD

Le coefficient de Schwarzschild caractérise la forme des surfaces coniques. Il peut être intéressant de le déduire des coefficients de Zernike lorsque l'on dispose d'un outil mathématique qui donne directement cette décomposition.

Le coefficient de Schwarzschild (Karl Schwarzschild) est noté « SC » ou « K ». C'est une notation qui facilite les calculs optiques. Il s'exprime pour les mathématiciens en fonction de « e » l'excentricité de la conique par : $K = -e^2$.

Pour les ellipsoïdes aplatis, un changement d'axe est nécessaire. On ne développera pas ici cette notion. Elle découle du fait que les mathématiques définissent les coniques comme le lieu d'un point circulant, selon divers rapports, entre une droite et un point. Tandis que l'optique utilise plus commodément les coniques comme des surfaces déformées par rapport au cercle. On appelle aussi le coefficient de Schwarzschild la constante de déformation de la conique.

Le coefficient vaut plus de 0 pour les ellipsoïdes aplatis sur l'axe optique (dits oblates), 0 pour la sphère, entre 0 et -1 pour les ellipsoïdes allongés sur l'axe optique (dits prolates), -1 pour le paraboloïde et moins de -1 pour les hyperboloïdes.

La hauteur du verre d'une surface conique est définie en tout point par :

$$z = \frac{h^2}{R \left(1 + \sqrt{1 - (K + 1) \cdot \frac{h^2}{R^2}} \right)} \quad (1)$$

Avec :

Z nul au centre de la surface prise comme origine

R le rayon de courbure de la surface mesuré sur l'axe optique (zone centrale du verre)

h la hauteur incidente du rayon sur la pupille

On peut développer une surface conique en polynômes de Zernike

On a jugé plus pratique de développer l'écart de l'onde émergeant d'un miroir conique (par rapport à la sphère de référence) dans le cas d'une mesure par interféromètre. Pour un interféromètre agissant depuis le centre de courbure de la conique, la différence de trajet entre les rayons passant par la conique et ceux passant par la sphère de référence est donné par :

$$\Delta l = 2\sqrt{(R - z)^2 + h^2} - 2R \quad (2)$$

Développement calculatoire :

On pose pour simplifier l'écriture : $\varepsilon = \frac{h^2}{R^2}$

On développe à l'ordre 2 (voir plus si affinité...) l'équation (1) :

$$\frac{z}{R} = \frac{\varepsilon}{2} + (K + 1) \frac{\varepsilon^2}{8} + (K + 1)^2 \frac{\varepsilon^3}{16} + (K + 1)^3 \frac{5\varepsilon^4}{128} + (K + 1)^4 \frac{7\varepsilon^5}{256} + \dots$$

On développe à l'ordre 2 (ou plus ...) sous la racine de (2) :

$$1 - K \frac{\varepsilon^2}{4} - K(K + 1) \frac{\varepsilon^3}{8} - K(K + 1)^2 \frac{5\varepsilon^4}{64} - K(K + 1)^3 \frac{7\varepsilon^5}{128} + \dots$$

On développe entièrement (2) :

$$\Delta l = -KR \frac{\varepsilon^2}{4} - K(K + 1)R \frac{\varepsilon^3}{8} - K(5(K + 1)^2 - K)R \frac{\varepsilon^4}{64} - K(K + 1)(7(K + 1)^2 - 2K)R \frac{\varepsilon^5}{128}$$

On rapporte à un rayon unitaire avec $h = \rho \cdot D/2$ et à la longueur d'onde de référence:

$\frac{\Delta l}{\lambda} = -\frac{K.D^4}{64\lambda.R^3}\rho^4 - \frac{K.(K+1).D^6}{512\lambda.R^5}\rho^6 + \dots$ pour finir par trouver la forme de l'onde développée selon les polynômes de Zernike.

Il ne faut pas oublier que les termes d'ordres supérieurs (qui ne sont pas tous développés ici) induisent des valeurs non nuls sur les coefficients de Zernike d'ordre inférieurs... Dans le cas d'une sphère tous les coefficients doivent être nuls. Mais autrement (et donc dans le cas d'une parabole parfaite observée depuis son centre de courbure), la première aberration de sphéricité n'est pas seule à être non nulle. On l'observe en développant les termes à la puissance 8 et 10.

Donc en première approximation le développement de Zernike d'une onde sphérique renvoyée par une surface conique (de coefficient de Schwarzschild K) est :

$$C_8 = -\frac{K.D^4}{6 \times 64.\lambda.R^3} = -\frac{K.D^4}{384.\lambda.R^3} = -\frac{K.D}{3072.\lambda.(F/D)^3}$$

$$C_3 = 3.C_8$$

$$C_0 = 2.C_8$$

Mais en toute rigueur la relation entre les coefficients de Zernike et le coefficient de Schwarzschild est plus compliquée ...

On retrouve ici la notion bien connue selon laquelle: Au centre de courbure d'un miroir parfaitement parabolique, s'il n'est pas trop ouvert, on peut négliger les termes de puissances élevées de l'aberration de sphéricité. Ces termes de puissance élevée sont liés à la mesure de la parabole depuis le centre de courbure, ils ne correspondent pas à des défauts de l'optique! Mais pour des optiques très ouvertes, il faut en tenir compte.

Le tableau ci-dessous donne la valeur du coefficient C_8 pour quelques miroirs typiques

Caractéristiques du miroir parabolique considéré	Valeur de C_8 à 550 nm Coefficient de l'aberration de sphéricité (Selon la présente convention de signe)
200 mm ouvert à 6	0,548
250 mm ouvert à 5	1,184
400 mm ouvert à 4,5	2,598
600 mm ouvert à 3,3	9,882

2.7. SIGNE DES COEFFICIENTS

Lorsque l'on calcule l'écart de l'onde réelle par rapport à l'onde de référence –C'est la convention des calculs développés ici– on trouve des coefficients de signe opposés à ceux que donne l'écart entre la sphère parfaite et l'onde réelle (comme le fait le logiciel libre Open Fringe par exemple).

Ainsi une parabole possède un coefficient du polynôme numéro 8 positif lorsque l'on retire l'onde de référence à l'onde réelle. Et inversement une parabole a un coefficient d'aberration de sphéricité négatif pour le logiciel libre Open Fringe.

2.8. EXPRESSION DE L'ÉCART TYPE DE L'ONDE

Lorsque l'aberration peut être décrite par un petit nombre d'aberrations de troisième ordre, il est pratique de qualifier l'aberration de l'onde par l'écart type de chaque aberration présente. Mais ce n'est pas parfait.

L'équation suivante donne l'expression générale de l'écart type pour une pupille circulaire selon tous les coefficients de la décomposition de Zernike. L'écart type est relatif à la meilleure onde sphérique. La formule dérive de celle donnant la variance qui est :

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{\max} \left(\frac{A_n^2}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{B_{n,m}^2 + C_{n,m}^2}{2n+1-m} \right)$$

L'écart type (racine de la variance détaillée ci-dessus) se calcule donc par une somme quadratique des coefficients de Zernike avec pondération.

On exprime usuellement l'écart type de l'onde en fraction de longueur d'onde pour le maximum de sensibilité de l'œil à 550 nanomètres.

Mais les coefficients de Zernike sont souvent exprimés en fraction de l'onde d'analyse des interféromètres : 650 nanomètres pour le rouge. Une pondération adaptée permet de calculer directement l'écart type à la bonne longueur d'onde. Le tableau suivant donne ces poids de conversion.

Table des coefficients de calcul de l'écart type de l'onde :

Ordre	Polynôme	Pondération mathématique	Poids de conversion 650-550	Appellation
0	1	1	109%	Piston
1	$\rho \cos[\theta]$	1/2	54%	Inclinaison en x
2	$\rho \sin[\theta]$	1/2	54%	Inclinaison en y
3	$-1 + 2 \rho^2$	1/√3	63%	Mise au point
4	$\rho^2 \cos[2 \theta]$	1/√6	44%	Astigmatisme à 0°
5	$\rho^2 \sin[2 \theta]$	1/√6	44%	Astigmatisme à 45°
6	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \cos[\theta]$	1/2√2	38%	Coma en x
7	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \sin[\theta]$	1/2√2	38%	Coma en y
8	$1 - 6 \rho^2 + 6 \rho^4$	1/√5	49%	Asphéricité

Les poids de conversion présentés ici permettent de calculer rapidement (sans faire de racine) l'importance d'un seul polynôme dans l'écart type de l'onde. C'est pour cet usage pratique qu'ils sont présentés ici. Pour tenir compte de plusieurs polynômes, il faut effectuer le calcul complet de la somme quadratique avec la pondération mathématique puis rapporter à la longueur d'onde appropriée.

2.9. EXPRESSION DU RAPPORT DE STREHL

Définition

Le point de l'image d'une étoile où l'intensité lumineuse est maximale est nommé point de diffraction. C'est le centre de la sphère de référence dans le plan focale d'observation. Idéalement, l'intensité lumineuse décroît à mesure que l'on s'éloigne de ce point selon une loi gaussienne.

Lorsque les aberrations sont petites, on trouve ce point en fixant les coefficients des polynômes d'inclinaison et de mise au point qui minimisent l'écart type de l'onde. Avec les polynômes de Zernike, il suffit d'annuler les coefficients de ces termes.

Le ratio de l'intensité lumineuse maximale sur l'intensité lumineuse maximale théorique sans aberration est nommé rapport de Strehl. Il se calcule selon :

$$\text{Rapport de Strehl} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \cdot e^{i2\pi \cdot W(\rho, \phi)} d\rho d\phi \right|^2$$

Avec W l'écart à l'onde parfaite exprimé en fraction d'onde

Pour une onde parfaite, le rapport de Strehl est égal à un.

Expression simplifiée du rapport de Strehl

L'expression se développe en polynôme de la variance. Dans le cas où les défauts sont assez petits, la simplification est :

$$\text{Rapport de Strehl} \approx 1 - (2\pi \sigma)^2 + (2\pi \sigma)^4 + \dots$$

Cette formule permet de calculer des rapports de Strehl facilement jusqu'à des valeurs de 0,1.

Critère de qualité des optiques

Une fois que le rapport de Strehl a été calculé, on peut qualifier la qualité de l'optique en utilisant le critère de Maréchal. Le critère de Maréchal stipule qu'un système optique est bien corrigé si le rapport de Strehl est supérieur à 0,8. Ce qui correspond à un écart type de l'onde de $\lambda / 14$.

Comme déjà indiqué plus haut, l'intérêt des polynômes de Zernike est que chaque terme minimise l'écart type de son fait. Dans le cas du rapport de Strehl le fait de retirer les termes d'inclinaison et de mise au point correspond à un déplacement du point focal qui majore l'intensité lumineuse. Si bien que le fait de pousser le développement plus avant ne peut qu'augmenter l'écart type sans ajouter d'inclinaison ou de mise au point à retirer. Chaque terme d'ordre supérieur incorpore une quantité appropriée des termes précédents (dont l'inclinaison et la mise au point) de telle manière que le point de diffraction reste invariant lorsque l'on pousse le développement plus avant.

3. LISTES DES POLYNOMES DE ZERNIKE

3.1. LES LISTES DES POLYNÔMES

La liste de James C. Wyant est ici donnée en coordonnées polaires.

Elle comporte 48 polynômes plus le piston. Le terme de $n = m = 0$ dit de piston est utilisé pour les analyses de figure d'interférence. Mais il n'est pas inclus dans le dénombrement des polynômes de Zernike.

On rencontre aussi la liste de John Loomis de l'Optical Sciences Center de l'université d'Arizona avec les termes de $n = 1$ à 5 plus le terme de $n = 6$ et de $m = 0$. Donc avec 36 termes plus le piston. Ils correspondent aux 35 premiers termes plus le numéro 48 de la liste de Wyant (plus le piston).

Le logiciel OpenFringe travaille au plus sur 42 termes de la liste de Wyant (plus le piston). Mais il ne comporte que les 39 premiers termes de Wyant plus trois aberrations sphériques d'ordre supérieur.

Le logiciel FringeXp ne travaille que sur les 24 premiers termes (plus le piston).

3.2. LA LISTE DE WYANT

Ordre	n	m	Polynôme
0	0	0	1
1	1	1	$\rho \cos[\theta]$
2	1	1	$\rho \sin[\theta]$
3	1	0	$-1 + 2 \rho^2$
4	2	2	$\rho^2 \cos[2 \theta]$
5	2	2	$\rho^2 \sin[2 \theta]$
6	2	1	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \cos[\theta]$
7	2	1	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \sin[\theta]$
8	2	0	$1 - 6 \rho^2 + 6 \rho^4$

Ordre	n	m	Polynôme
9	3	3	$\rho^3 \cos[3 \theta]$
10	3	3	$\rho^3 \sin[3 \theta]$
11	3	2	$\rho^2 (-3 + 4 \rho^2) \cos[2 \theta]$
12	3	2	$\rho^2 (-3 + 4 \rho^2) \sin[2 \theta]$
13	3	1	$\rho (3 - 12 \rho^2 + 10 \rho^4) \cos[\theta]$
14	3	1	$\rho (3 - 12 \rho^2 + 10 \rho^4) \sin[\theta]$
15	3	0	$-1 + 12 \rho^2 - 30 \rho^4 + 20 \rho^6$

Ordre	n	m	Polynôme
16	4	4	$\rho^4 \cos[4 \theta]$
17	4	4	$\rho^4 \sin[4 \theta]$
18	4	3	$\rho^3 (-4 + 5 \rho^2) \cos[3 \theta]$
19	4	3	$\rho^3 (-4 + 5 \rho^2) \sin[3 \theta]$
20	4	2	$\rho^2 (6 - 20 \rho^2 + 15 \rho^4) \cos[2 \theta]$
21	4	2	$\rho^2 (6 - 20 \rho^2 + 15 \rho^4) \sin[2 \theta]$
22	4	1	$\rho (-4 + 30 \rho^2 - 60 \rho^4 + 35 \rho^6) \cos[\theta]$
23	4	1	$\rho (-4 + 30 \rho^2 - 60 \rho^4 + 35 \rho^6) \sin[\theta]$
24	4	0	$1 - 20 \rho^2 + 90 \rho^4 - 140 \rho^6 + 70 \rho^8$

Ordre	n	m	Polynôme
25	5	5	$\rho^5 \cos[5 \theta]$
26	5	5	$\rho^5 \sin[5 \theta]$
27	5	4	$\rho^4 (-5 + 6 \rho^2) \cos[4 \theta]$
28	5	4	$\rho^4 (-5 + 6 \rho^2) \sin[4 \theta]$
29	5	3	$\rho^3 (10 - 30 \rho^2 + 21 \rho^4) \cos[3 \theta]$
30	5	3	$\rho^3 (10 - 30 \rho^2 + 21 \rho^4) \sin[3 \theta]$
31	5	2	$\rho^2 (-10 + 60 \rho^2 - 105 \rho^4 + 56 \rho^6) \cos[2 \theta]$
32	5	2	$\rho^2 (-10 + 60 \rho^2 - 105 \rho^4 + 56 \rho^6) \sin[2 \theta]$
33	5	1	$\rho (5 - 60 \rho^2 + 210 \rho^4 - 280 \rho^6 + 126 \rho^8) \cos[\theta]$
34	5	1	$\rho (5 - 60 \rho^2 + 210 \rho^4 - 280 \rho^6 + 126 \rho^8) \sin[\theta]$
35	5	0	$-1 + 30 \rho^2 - 210 \rho^4 + 560 \rho^6 - 630 \rho^8 + 252 \rho^{10}$

Ordre	n	m	Polynôme
36	6	6	$\rho^6 \text{Cos}[6 \theta]$
37	6	6	$\rho^6 \text{Sin}[6 \theta]$
38	6	5	$\rho^5 (-6 + 7 \rho^2) \text{Cos}[5 \theta]$
39	6	5	$\rho^5 (-6 + 7 \rho^2) \text{Sin}[5 \theta]$
40	6	4	$\rho^4 (15 - 42 \rho^2 + 28 \rho^4) \text{Cos}[4 \theta]$
41	6	4	$\rho^4 (15 - 42 \rho^2 + 28 \rho^4) \text{Sin}[4 \theta]$
42	6	3	$\rho^3 (-20 + 105 \rho^2 - 168 \rho^4 + 84 \rho^6) \text{Cos}[3 \theta]$
43	6	3	$\rho^3 (-20 + 105 \rho^2 - 168 \rho^4 + 84 \rho^6) \text{Sin}[3 \theta]$
44	6	2	$\rho^2 (15 - 140 \rho^2 + 420 \rho^4 - 504 \rho^6 + 210 \rho^8) \text{Cos}[2 \theta]$
45	6	2	$\rho^2 (15 - 140 \rho^2 + 420 \rho^4 - 504 \rho^6 + 210 \rho^8) \text{Sin}[2 \theta]$
46	6	1	$\rho (-6 + 105 \rho^2 - 560 \rho^4 + 1260 \rho^6 - 1260 \rho^8 + 462 \rho^{10}) \text{Cos}[\theta]$
47	6	1	$\rho (-6 + 105 \rho^2 - 560 \rho^4 + 1260 \rho^6 - 1260 \rho^8 + 462 \rho^{10}) \text{Sin}[\theta]$
48	6	0	$1 - 42 \rho^2 + 420 \rho^4 - 1680 \rho^6 + 3150 \rho^8 - 2772 \rho^{10} + 924 \rho^{12}$

3.3. UNE LISTE DE CALCUL DE L'ÉCART TYPE

Le tableau ci-dessous redonne les polynômes de Zernike dans le classement de Wyant. Il est ajouté le coefficient de pondération intervenant dans la somme quadratique permettant le calcul de l'écart type de l'onde.

On a ajouté une colonne permettant un calcul rapide et approché de l'écart type à partir de chaque coefficient de Zernike. C'est la colonne de poids type exprimé en pourcentage. C'est la valeur du coefficient avec la mise à l'échelle de l'onde : Considérant que la plupart des interféromètres fonctionnent vers 650 nm dans le rouge mais que les résultats sont convertis en déformation de l'onde à 550 nm pour le maximum de sensibilité de l'œil en vision diurne (dite vision photoptique).

La dernière colonne rappelle le type d'aberration visée par chaque polynôme. Ces appellations ne sont pas normalisées. On peut en trouver d'autres.

Table des coefficients de calcul de l'écart type de l'onde :

Ordre	Polynôme	Coefficient	Poids type	Aberration (s)
0	1	1	109%	Piston
1	$\rho \text{Cos}[\theta]$	1/2	54%	Inclinaison en x
2	$\rho \text{Sin}[\theta]$	1/2	54%	Inclinaison en y
3	$-1 + 2 \rho^2$	1/√3	63%	Focalisation
4	$\rho^2 \text{Cos}[2 \theta]$	1/√6	44%	Astigmatisme à 0°
5	$\rho^2 \text{Sin}[2 \theta]$	1/√6	44%	Astigmatisme à 45°
6	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \text{Cos}[\theta]$	1/2√2	38%	Coma en x
7	$\rho (-2 + 3 \rho^2) \text{Sin}[\theta]$	1/2√2	38%	Coma en y
8	$1 - 6 \rho^2 + 6 \rho^4$	1/√5	49%	Sphéricité et focalisation

Ordre	Polynôme	Coefficient	Poids type	Aberration principale
9	$\rho^3 \text{Cos}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{2}$	38%	Tri feuille
10	$\rho^3 \text{Sin}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{2}$	38%	Tri feuille
11	$\rho^2 (-3 + 4 \rho^2) \text{Cos}[2 \theta]$	$1/\sqrt{10}$	34%	Astigmatisme ordre 2
12	$\rho^2 (-3 + 4 \rho^2) \text{Sin}[2 \theta]$	$1/\sqrt{10}$	34%	Astigmatisme ordre 2
13	$\rho (3 - 12 \rho^2 + 10 \rho^4) \text{Cos}[\theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Coma en x ordre 2
14	$\rho (3 - 12 \rho^2 + 10 \rho^4) \text{Sin}[\theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Coma en y ordre 2
15	$-1 + 12 \rho^2 - 30 \rho^4 + 20 \rho^6$	$1/\sqrt{7}$	41%	Sphéricité ordre 2
16	$\rho^4 \text{Cos}[4 \theta]$	$1/\sqrt{10}$	34%	Quadri feuille
17	$\rho^4 \text{Sin}[4 \theta]$	$1/\sqrt{10}$	34%	Quadri feuille
18	$\rho^3 (-4 + 5 \rho^2) \text{Cos}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Tri feuille ordre 2
19	$\rho^3 (-4 + 5 \rho^2) \text{Sin}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Tri feuille ordre 2
20	$\rho^2 (6 - 20 \rho^2 + 15 \rho^4) \text{Cos}[2 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Astigmatisme ordre 2
21	$\rho^2 (6 - 20 \rho^2 + 15 \rho^4) \text{Sin}[2 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Astigmatisme ordre 2
22	$\rho (-4 + 30 \rho^2 - 60 \rho^4 + 35 \rho^6) \text{Cos}[\theta]$	$1/4$	27%	Coma ordre 3
23	$\rho (-4 + 30 \rho^2 - 60 \rho^4 + 35 \rho^6) \text{Sin}[\theta]$	$1/4$	27%	Coma ordre 3
24	$1 - 20 \rho^2 + 90 \rho^4 - 140 \rho^6 + 70 \rho^8$	$1/3$	36%	Sphéricité ordre 3

O.	Polynôme	Coef.	Poids	Aberration ...
25	$\rho^5 \text{Cos}[5 \theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Penta feuille
26	$\rho^5 \text{Sin}[5 \theta]$	$1/2\sqrt{3}$	31%	Penta feuille
27	$\rho^4 (-5 + 6 \rho^2) \text{Cos}[4 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Tétra ...
28	$\rho^4 (-5 + 6 \rho^2) \text{Sin}[4 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Tétra ...
29	$\rho^3 (10 - 30 \rho^2 + 21 \rho^4) \text{Cos}[3 \theta]$	$1/4$	27%	Tri ...
30	$\rho^3 (10 - 30 \rho^2 + 21 \rho^4) \text{Sin}[3 \theta]$	$1/4$	27%	Tri ...
31	$\rho^2 (-10 + 60 \rho^2 - 105 \rho^4 + 56 \rho^6) \text{Cos}[2 \theta]$	$1/3\sqrt{2}$	26%	Astigmatisme ...
32	$\rho^2 (-10 + 60 \rho^2 - 105 \rho^4 + 56 \rho^6) \text{Sin}[2 \theta]$	$1/3\sqrt{2}$	26%	Astigmatisme ...
33	$\rho (5 - 60 \rho^2 + 210 \rho^4 - 280 \rho^6 + 126 \rho^8) \text{Cos}[\theta]$	$1/2\sqrt{5}$	24%	Coma ...
34	$\rho (5 - 60 \rho^2 + 210 \rho^4 - 280 \rho^6 + 126 \rho^8) \text{Sin}[\theta]$	$1/2\sqrt{5}$	24%	Coma ...
35	$-1 + 30 \rho^2 - 210 \rho^4 + 560 \rho^6 - 630 \rho^8 + 252 \rho^{10}$	$1/\sqrt{11}$	33%	Sphéricité 4
36	$\rho^6 \text{Cos}[6 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Hexa feuille
37	$\rho^6 \text{Sin}[6 \theta]$	$1/\sqrt{14}$	29%	Hexa feuille
38	$\rho^5 (-6 + 7 \rho^2) \text{Cos}[5 \theta]$	$1/4$	27%	Penta ...
39	$\rho^5 (-6 + 7 \rho^2) \text{Sin}[5 \theta]$	$1/4$	27%	Penta ...
40	$\rho^4 (15 - 42 \rho^2 + 28 \rho^4) \text{Cos}[4 \theta]$	$1/3\sqrt{2}$	26%	Tétra ...
41	$\rho^4 (15 - 42 \rho^2 + 28 \rho^4) \text{Sin}[4 \theta]$	$1/3\sqrt{2}$	26%	Tétra ...
42	$\rho^3 (-20 + 105 \rho^2 - 168 \rho^4 + 84 \rho^6) \text{Cos}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{5}$	24%	Tri ...
43	$\rho^3 (-20 + 105 \rho^2 - 168 \rho^4 + 84 \rho^6) \text{Sin}[3 \theta]$	$1/2\sqrt{5}$	24%	Tri ...
44	$\rho^2 (15 - 140 \rho^2 + 420 \rho^4 - 504 \rho^6 + 210 \rho^8) \text{Cos}[2 \theta]$	$1/\sqrt{22}$	23%	Astigmatisme ...
45	$\rho^2 (15 - 140 \rho^2 + 420 \rho^4 - 504 \rho^6 + 210 \rho^8) \text{Sin}[2 \theta]$	$1/\sqrt{22}$	23%	Astigmatisme ...
46	$\rho (-6 + 105 \rho^2 - 560 \rho^4 + 1260 \rho^6 - 1260 \rho^8 + 462 \rho^{10}) \text{Cos}[\theta]$	$1/2\sqrt{6}$	22%	Coma ...
47	$\rho (-6 + 105 \rho^2 - 560 \rho^4 + 1260 \rho^6 - 1260 \rho^8 + 462 \rho^{10}) \text{Sin}[\theta]$	$1/2\sqrt{6}$	22%	Coma ...
48	$1 - 42 \rho^2 + 420 \rho^4 - 1680 \rho^6 + 3150 \rho^8 - 2772 \rho^{10} + 924 \rho^{12}$	$1/\sqrt{13}$	30%	Sphéricité 5